
Aki Taanila

LINEAARINEN OPTIMOINTI

26.4.2011

JOHDANTO

Tässä monisteessa esitetään lineaarisen optimoinnin alkeet. Moniste sisältää tarvittavat Excel ohjeet. Viimeisin versio tästä monisteesta ja siihen liittyvästä materiaalista löytyy osoitteesta

<http://myy.haaga-helia.fi/~taaak/m>

Yllä mainitusta osoitteesta löytyvät myös tähän monisteeseen liittyvät Excel esimerkit.

Tutustu myös muihin oppimateriaaleihini <http://myy.haaga-helia.fi/~taaak/>

LINEAARINEN OPTIMOINTI

Päätöksentekotilanteessa on usein taustalla tarve päästä asetettuun tavoitteeseen huomioiden toimintaympäristön asettamat rajoitteet. Varsinainen päätös kohdistuu niin kutsuttuihin **päätösmuuttujiin**, joiden arvoihin päätöksentekijä voi tiettyjen rajojen puitteissa vaikuttaa. **Tavoitteena** voi olla esimerkiksi voiton maksimointi tai kustannusten minimointi. **Rajoitteina** voivat olla esimerkiksi rajalliset resurssit (aika, työ, materiaali, raha, jne.), rajoittavat ohjeistukset (esimerkiksi tuotteen täytyy täyttää tietyt laatuvaatimukset.) tai kysyntää koskevat rajoitukset.

Päätösmuuttujien arvot voidaan määrittää lineaarisen optimoinnin keinoin, jos voidaan rakentaa päätöksentekotilannetta vastaava (ratkaistavissa oleva) lineaarinen malli. Mallin tulee sisältää ainakin:

- **Päätösmuuttujat**, joiden arvoihin päätöksentekijä voi vaikuttaa.
- **Tavoitefunktio**, jonka arvo voidaan laskea päätösmuuttujien lineaarisena funktiona. Lineaarisessa funktiossa lasketaan yhteen vakioilla kerrottuja muuttujien arvoja ja vakioita. Lineaarisessa funktiossa ei voi olla esim. muuttujien potensseja, juuria tai logaritmeja. Esim. $2x+4y+3$ on muuttujien x ja y lineaarinen funktio. Lineaarisessa optimoinnissa on yleensä tavoitteena minimoida tai maksimoida tavoitefunktion arvo.
- Toimintaympäristön asettamat **rajoitteet**. Lineaarisissa malleissa rajoitteetkin täytyy ilmaista lineaaristen lausekkeiden avulla.

Lineaarisen optimoinnin perusideat selviävät parhaiten yksinkertaisen esimerkin avulla.

Esimerkki

Keramiikkayrityksessä korkean ammattitaidon omaavat taiteilijat valmistavat perinteisen mallin mukaisia maljoja ja mukeja erikoissavesta. Tuotteiden valmistamiseen tarvittavat resurssit ja tuotteiden myynnistä seuraava voitto selviävät seuraavasta taulukosta.

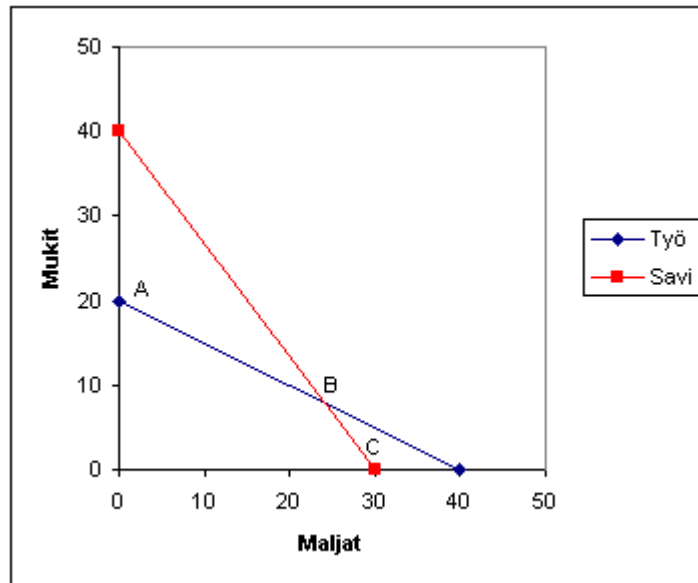
	Tarvittavat resurssit/yksikkö		
Tuote	Työ (tuntia)	Savi (kg)	Voitto (euroa)
Malja	1	4	40
Muki	2	3	50

Tuotantopäivän ajaksi on käytettävissä 40 tuntia työtä ja 120 kg savea.

- **Päätösmuuttujat**: valmistettavien maljojen ja mukien määrät.
- Tavoitteena on mahdollisimman suuri voitto. **Tavoitefunktio** lasketaan päätösmuuttujien arvojen perusteella lausekkeella $40 \cdot \text{maljat} + 50 \cdot \text{mukit}$.
- Ihmistyö ja savi asettavat selkeät **rajoitteet** tuotannolle. Yksinkertaisuuden vuoksi emme aseta kysyntää koskevia rajoituksia.

Ratkaisun löytämiseksi voimme piirtää koordinaatiston, jonka x-akselille merkitsemme maljojen määrän ja y-akselille mukien määrän. Koordinaatistoon voimme piirtää suoran viivan, joka kuvaa mahdollisia tuotantomääriä, jos käytettävissä oleva työ käytetään kokonaisuudessaan (oletetaan saven riittävän). Käytettävissä olevalla työllä (40 tuntia) voidaan valmistaa 40 yksikköä maljoja (jollei mukeja valmisteta lainkaan) tai 20 yksikköä mukeja (jollei maljoja valmisteta lainkaan). Suora viiva voidaan piirtää pelkkiä maljoja (40,0) ja pelkkiä mukeja (0,20) vastaavien pisteiden avulla. Vastaavasti voimme

piirtää suoran viivan, joka kuvaa mahdollisia tuotantomääriä, jos käytettävissä oleva savi käytetään kokonaisuudessaan (oletetaan työn riittävän).




Kuvio 1. Graafinen ratkaisu

Mahdolliset ratkaisut löytyvät alueelta, jota rajoittavat pisteet A, B ja C sekä koordinaattiakselit. Ainoastaan tällä alueella sekä työ että savi riittävät. Arvatenkin parhaaseen voittoon päästään käyttämällä työtä ja savea mahdollisimman paljon eli käytännössä parhaan ratkaisun täytyy sijaita janalla AB tai BC. Optimiratkaisu löytyy mahdollisten ratkaisujen aluetta rajoittavista kärkipisteistä eli tässä tapauksessa pisteiden A, B ja C joukosta. Laskemalla voitto näissä kolmessa tapauksessa todetaan optimiratkaisun olevan pisteessä B (maljoja 24 yksikköä ja mukeja 8 yksikköä).

Linearisessa optimoinnissa siis etsitään suorien leikkauspisteitä, joiden joukosta optimiratkaisu löytyy.

Excelin käyttö optimoinnissa

Enemmän rajoittavia ehtoja ja päätösmuuttujia sisältävissä tapauksissa ratkaisemisessa kannattaa käyttää tietokoneohjelmaa. Excelissä on mukana optimointiongelmien ratkomiseen tarkoitettu **Solver** (Ratkaisin) -toiminto. Jos käytät toimintoa ensimmäistä kertaa, niin:

1. Napsauta  **Office**-painiketta ja valitse alhaalta **Excel Options** (Excelin asetukset). Excel 2010: **File-Options** (Tiedosto-Asetukset).
2. Valitse vasemmalta **Add Ins** (Apuohjelmat) ja valitse sitten alhaalta **Manage** (Hallinta) -ruudusta **Excel Add Ins** (Excel-apuohjelmat).
3. Valitse **Go** (Siirry).
4. Valitse luettelosta **Solver** (Ratkaisin) ja valitse **OK**. Jos Excel huomauttaa, että ratkaisinta ei ole asennettu, niin valitse **Yes** (Kyllä) asentaaksesi ne.

Kun olet ottanut käyttöön **Solver** (Ratkaisin) -työkalun, niin voit käyttää **Data** (Tiedot) -välilehden **Analysis** (Analyysi) -ryhmässä olevaa **Solver** (Ratkaisija) -komentoa.

Esimerkki Excelin käytöstä

Edellinen esimerkki voidaan mallintaa Excel-tilaukseen esimerkiksi seuraavasti:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Keramiikkapaja						
2							
3			Voitto/yksikkö	Työ	Savi		
4	Malja		40	1	4		Rajoitteet
5	Muki		50	2	3		
6	Käytettävissä			40	120		
7							
8		Tuotanto	Voitto	Työ	Savi		
9	Malja		0	0	0		
10	Muki		0	0	0		
11	Yhteensä	0	0	0	0		
12							
13		Päätösmuuttujat		Tavoitefunktio			
14							

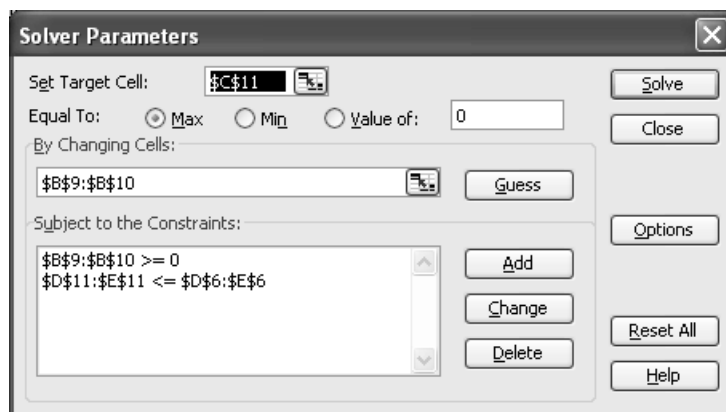
Lähtötilanteessa, ennen ratkaisua, tuotantomäärille varatut solut B9:B10 voidaan jättää tyhjiksi. Kaavoja käyttäen lasketaan tuotantomääriä vastaavat tiedot:

- voitto; esim. maljojen tuotantoa vastaava voitto lasketaan kaavalla $=B9*C4$
- työ; esim. maljojen tuotantoa vastaava työ lasketaan kaavalla $=B9*D4$
- savi; esim. maljojen tuotantoa vastaava savi lasketaan kaavalla $=B9*E4$.

Yhteensä-riville lasketaan summakaavoilla tuotanto, voitto, työ ja savi yhteensä.

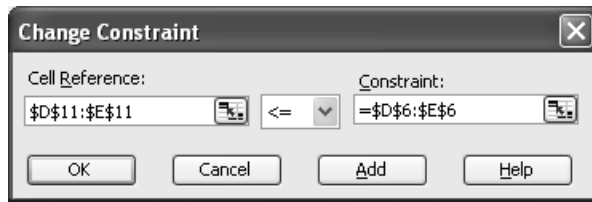
Tavoitefunktio, joka halutaan maksimoida, on soluun C11 laskettu voitto ($=C9+C10$). Työn ja saven yhteismäärien täytyy olla pienempiä tai yhtä suuria kuin niille asetetut rajoitteet.

Ratkaiseminen suoritetaan toiminnolla **Solver** (Ratkaisin). Excel 2010:ssä keskusteluikkunoiden ulkoasu poikkeaa jonkin verran tässä esitetystä.



Määrittelyikkunaan täytetään viittaus tavoitefunktioon (tässä tapauksessa soluun C11 laskettava voitto), optimointitapa (maksimointi vai minimointi) ja viittaukset päätösmuuttujiin (tässä tapauksessa tuotantomäärät soluissa B9:B10).

Rajoittavat ehdot lisätään **Add** (Lisää) -painikkeella. Esimerkiksi työn ja saven riittävyyden liittyvässä ehdossa määritellään, että soluihin D11:E11 lasketut työn ja saven määrät saavat olla korkeintaan soluissa D6:E6 olevien rajoitteiden suuruisia:



Rajoittavat ehdot kuitataan

- **Add** (Lisää) -painikkeella, jos aiotaan lisätä vielä muita ehtoja
- **OK**-painikkeella, jos ei lisätä enää muita ehtoja.

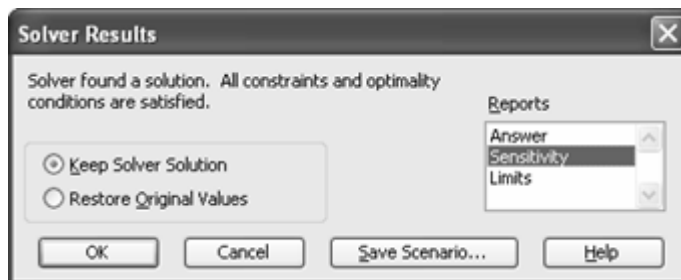
Päätösmuuttujiin täytyy yleensä liittää ehto ei-negatiivisuudesta.

Ennen ratkaisun etsimistä täytyy vielä määrittää, että kyseessä on lineaarinen optimointitehtävä:

- napsauta **Options** (Asetukset)
- valitse optio **Assume linear model** (Oleta malli lineaariseksi) ja paina **OK**.

Excel 2010: Edellisten sijasta valitaan **Solving Method** (Ratkaisumenetelmät) - alusvetovalikosta **Simplex LP**.

Excel lähtee etsimään ratkaisua **Solve** (Ratkaise) -painiketta painamalla. Excel ilmoittaa ratkaisun löytymisestä (tai siitä ettei ratkaisua löytynyt).



Ratkaisun löytymisestä ilmoittavan ikkunan **OK** -painikkeella saadaan ratkaisu laskentataulukkoon. Ennen **OK**:n painamista voidaan tarvittaessa valita mukaan myös **Answer**, **Sensitivity** ja **Limits** (Vastaus, Herkkyys ja Rajoitukset) raportit. Raportit sisältävät päätöksentekijälle, joka niitä osaa tulkita, käyttökelpoista tietoa. Erityisesti kannattaa tutustua **Sensitivity**-raporttiin:

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$9	Malja Tuotanto	24	0	40	26,66666667	15
\$B\$10	Muki Tuotanto	8	0	50	30	20

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$D\$11	Yhteensä Työ	40	16	40	40	10
\$E\$11	Yhteensä Savi	120	6	120	40	60

Sensitivity-raportin maljoihin ja mukeihin liittyvä **Allowable Increase** ja **Allowable Decrease** tulkitaan seuraavasti:

- Maljoihin liittyvä voitto yksikköä kohden saa kasvaa 26,7 tai vähentyä 15 ennen kuin optimiratkaisun päätösmuuttujien arvot muuttuvat. Tavoitefunktion arvo luonnollisesti muuttuu jos voitto yksikköä kohden muuttuu.

- Mukeihin liittyvä voitto yksikköä kohden saa kasvaa 30 tai vähentyä 20 ennen kuin optimiratkaisun päätösmuuttujien arvot muuttuvat. Tavoitefunktion arvo luonnollisesti muuttuu jos voitto yksikköä kohden muuttuu.

Herkkyyseraportin **Shadow Price** (Varjohinta) -sarakkeesta nähdään:

- Jos työtä olisi käytettävissä 1 tunti enemmän, niin voitto kasvaisi 16 eurolla. **Allowable Increase** ja **Allowable Decrease** tarkoittavat, että työn määrä saa kasvaa 40 tai vähentyä 10 tuntia ennen kuin varjohinta muuttuu. Optimiratkaisu (pätösmuuttujien arvot) toki voi muuttua.
- Jos savea olisi käytettävissä 1 kg enemmän, niin voitto kasvaisi 6 eurolla. **Allowable Increase** ja **Allowable Decrease** tarkoittavat, että saveen määrä saa kasvaa 40 tai vähentyä 60 kg ennen kuin varjohinta muuttuu. Optimiratkaisu (pätösmuuttujien arvot) toki voi muuttua.

Yhteenveto

Yhteenvetona voidaan koota yhteen ratkaisun vaiheet:

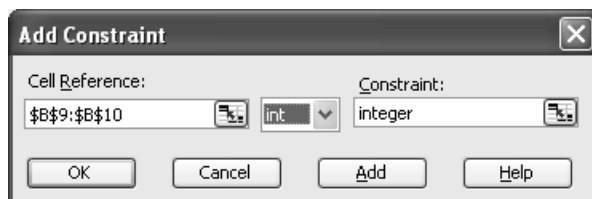
- määrittele päätösmuuttujat
- määrittele tavoitefunktio päätösmuuttujien funktiona
- selvitä kaikki toimintaympäristöön liittyvät rajoitteet (älä unohda ei-negatiivisuus rajoitteita)
- järjestä päätösmuuttujat, tavoitefunktio ja rajoitteet Excel-taulukkoon
- ratkaise ongelma Excelin **Solver** (Ratkaisin) -toiminnolla.

5.1 Muuntyyppisiä optimointiongelmia

Kokonaislukuongelmat

Monissa käytännön sovelluksissa vain kokonaisluvut kelpaavat päätösmuuttujien arvoiksi. Laskennallisesti tällaiset ongelmat ovat vaikeampia kuin puhtaat lineaariset ongelmat.

Exceliä käytettäessä kokonaislukuongelmia voidaan ratkaista lisäämällä päätösmuuttujia koskeva rajoittava ehto **int** (kok):



Pätösmuuttujat voidaan rajoittaa myös binäärisiksi, jolloin sallitut arvot ovat vain 0 ja 1.

Ei-lineaariset ongelmat

Pätösmuuttujien, tavoitefunktion ja rajoitteiden väliset riippuvuudet eivät aina ole lineaarisia. Excelin **Solver** (Ratkaisin) -toiminnolla voidaan ratkaista myös ei-lineaarisia optimointiongelmia, mutta niitä ei käsitellä tässä monisteessa.